• $\widehat{\left(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FI}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{PM}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PN}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{PN},\overrightarrow{FI}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv 0 + \frac{-\pi}{4} + 0 \quad [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

⋆ $FI=\sqrt{MF^2 + MI^2}$ car MFI est un triangle rectangle en M.

$= \sqrt{2MF^2}$ car $MF=\frac{1}{2}MP = \frac{1}{2}MN = MI$.

$= \sqrt{2}\,MF$

Ainsi $\widehat{\left(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FI}\right)} \equiv -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$ et $FI = \sqrt{2}\,MF$ donnent que I est l'image de M par la similitude directe de centre F, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

4-a) $tg\widehat{MFN} = \frac{MN}{MF} = \frac{MN}{\frac{1}{2}MP} = 2 \quad$ car $MN = MP$

b) Comme α est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FN}\right)$ tel que $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ alors α est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FN}\right)$

$\Rightarrow \alpha = -\widehat{MFN}$ car de [FM) vers [FN) on parcourt le sens négatif de l'orientation

$\Rightarrow tg\alpha = tg\left[-\widehat{MFN}\right] = -tg\widehat{MFN} = -2$

• la fonction tangente tg réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur IR (car tg est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[; (tgx)' = 1 + tg^2x > 0 \Rightarrow$ tg est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$)

D'où

$tg\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = \text{arctg}(-2)$ avec arctg la bijection réciproque de tg)

Ainsi quand M varie sur $(\mathscr{C})$; $\alpha = \text{arctg}(-2)$ qui est un réel fixe dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

c) $\otimes\ FN = \sqrt{MF^2 + MN^2} = \sqrt{MF^2 + (2MF)^2} = \sqrt{5}\,MF$

$\oplus\ \widehat{\left(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FN}\right)} \equiv \alpha \quad [2\pi]$

D'où N est l'image de M par la similitude directe S de centre F, de rapport $\sqrt{5}$ et d'angle α.

d) N=S(M) et M varie sur $(\mathscr{C})$

$\Rightarrow$ N varie sur $(\mathscr{C}_2) = S((\mathscr{C}))$ le cercle de centre $O_1 = S(O)$ et de rayon $\sqrt{5}R$.